ネットワーク上の3すくみダイナミクスと振動現象

増田 直紀
東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻

1 はじめに

サイクリックな競争関係は色々な場面で見られる (例えば [5, 6])。最も簡単なサイクリックな競争系は、じゃんけんのグー、チョキ、パーの関係にある3種が競争している状況である。このような系は、協力行動の進化のモデルにおいても現れる (例えば [4])。3種のうちのどれかが絶対的な勝者というわけではないことに起因して、3すくみ系では集団振動などの現象が見られる。

3すくみ系や他のサイクリックな競争系は、今までは平均場近似 (完全グラフ) または正方格子などの簡単なグラフの上でのみ扱われてきた。グラフの各頂点にグー、チョキ、パーのうちのどれかの種が存在し、隣の種が自分よりも弱い種 (例えばグーに対するチョキ) ならば、ポアソン待ち時間の後に相手を自分の種に変える、という無限粒子系である。本研究では、スケールフリー・ネットワークに代表されるような、次数のばらつきが大きいネットワークにおける3すくみ系を解析した。特に、平均場近似では、3種の共存状態が系に依存して中立安定または不安定であることが典型的であるが、次数が非一様なネットワークでは、共存状態が安定化されやすいことを解析的、数値的に示した。

非一様な次数を持つネットワークの解析に対しては、拡張された平均場近似を用いることが一般的に有効である。SIS モデルという伝播モデルの複雑ネットワーク版に用いられたこのようなアプローチ [3] を、空白地のない標準的な3すくみ系に応用する。$\rho_{i,k}$ を、次数 k の頂点が状態 $i\ (=0,1,2)$ をとる確率とする。また、任意の頂点の隣接点が状態 i である確率を Θ_i と書く。すると、

$$\Theta_i = \sum_k k p_k \rho_{i,k} / \langle k \rangle \tag{1}$$

となる。また、頂点は 0, 1, 2 のいずれかの状態を必ずとるので $\rho_{0,k} = 1 - \rho_{1,k} - \rho_{2,k}$、および $\Theta_0 = 1 - \Theta_1 - \Theta_2$ が成立する。よって、状態 1 と 2 の密度のみを考えればよい。各状態をとる頂点の密度の時間発展は

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{1,k} &= \lambda(1-\rho_{1,k}-\rho_{2,k})k\Theta_1 - \mu\rho_{1,k}k\Theta_2, && (2)\\ \dot{\rho}_{2,k} &= \mu\rho_{1,k}k\Theta_2 - \rho_{2,k}k(1-\Theta_1-\Theta_2) && (3) \end{aligned}$$

で与えられる。平衡状態では

$$\begin{pmatrix} \rho^*_{1,k} \\ \rho^*_{2,k} \end{pmatrix} = \frac{\lambda\Theta^*_1}{(\lambda\Theta^*_1+\mu\Theta^*_2)(1-\Theta^*_1-\Theta^*_2)+\lambda\mu\Theta^*_1\Theta^*_2} \begin{pmatrix} 1-\Theta^*_1-\Theta^*_2 \\ \mu\Theta^*_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

となる。3種の共存解は

$$\begin{pmatrix} \Theta^*_1 \\ \Theta^*_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^*_{1,k} \\ \rho^*_{2,k} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda+\mu+1} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{5}$$

で与えられ、頂点が各状態をとる確率は次数 k に依存しない [1]。しかし、共存状態の線形安定性は k の分布に依存するのである。

簡単のために np 頂点が次数 k_1 を持ち、残りの $n(1-p)$ 頂点が次数 k_2 を持つネットワークを考える。すると、式 (2)、(3) は4次元の力学系を定義する。本質を損なわずに $\lambda=\mu=1$ と置くと、平衡状態における Jacobian から作られた特性方程式は

$$x^4+\frac{3k_1k_2}{\langle k\rangle}x^3+3\left[\frac{k_1k_2\left(k_1+k_2-\langle k\rangle\right)}{\langle k\rangle}+\frac{\langle k^2\rangle^2}{\langle k\rangle^2}\right]x^2+9\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle}k_1k_2x+9k_1^2k_2^2=0 \tag{6}$$

となる。ただし、$\langle k\rangle=pk_1+(1-p)k_2$, $\langle k^2\rangle=pk_1^2+(1-p)k_2^2$ である。$k_1=k_2=k$ ならば、通常の平均場近似となり、系は中立安定である。すなわち、固有値は $x=\sqrt{3}ki$, $(-3\pm\sqrt{3})k/2$ となる。次数分布が一般の場合は、Routh-Hurwitz の条件は

$$\begin{aligned}
|H_1| &= 1,\\
|H_2| &= pk_2^2\left(\langle k\rangle-k_1/2\right)^2+(1-p)k_1^2\left(\langle k\rangle-k_2/2\right)^2+3k_1^2k_2^2/4>0,\\
|H_3| &= 81k_1^2k_2^2p(1-p)(k_2-k_1)^2\left[\langle k^2\rangle^2+2k_1k_2\langle k\rangle^2\right]/\langle k\rangle^4,\\
|H_4| &= 9k_1^2k_2^2|H_3|,
\end{aligned} \tag{7}$$

となる。$|H_i|$ は i 番目の主小行列式である。共存状態は $|H_3|,|H_4|>0$ が満たされれば安定であり、この条件は $k_1\neq k_2$, $p\neq 0,1$ と同値である。次数分布の非一様性が、確かに3種の共存を助けるのである。共存は、各状態の密度が時間的に振動していないことに対応する。

この結果は、もっと複雑な次数分布を持つネットワーク上の数値計算でも確認されている [2]。数値計算によると、次数分布が非一様であるほど、安定化の度合いが大きい。また、空白地があるような3すくみ競争系のモデルでも、同様の結果が得られる [2]。

謝辞

理化学研究所基礎科学特別研究員制度に謝辞を表する．また、本研究は、今野紀雄氏 (横浜国立大学) との共同研究である。

参考文献

[1] N. Masuda and N. Konno, Multi-state epidemic processes on complex networks. J. Theor. Biol. **243**, 64–75 (2006).

[2] N. Masuda and N. Konno, Heterogeneity in connectivity of habitat networks saves stable coexistence of competing species. Phys. Rev. E **74**, 066102 (2006).

[3] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, Epidemic spreading in scale-free networks. Phys. Rev. Lett. **86**, 3200–3203 (2001).

[4] D. Semmann, H.-J. Krambeck, and M. Milinski, Volunteering leads to rock-paper-scissors dynamics in a public goods game. Nature **425**, 390–393 (2003).

[5] B. Sinervo and C. M. Lively, The rock-paper-scissors game and the evolution of alternative male strategies. Nature **380**, 240–243 (1996).

[6] G. Szabó and G. Fáth, Evolutionary games on graphs. Phys. Rep., in press (2007).